PROBLEMA
DVPLATIO TRIANGVLI AEQVILATERI

Independenter ab alijs quam prioribus tribus Libris Euclidis.

In Vniuersitate Pragensi mense Septembri anni 1679. solemniter propositum

Omnibus totius Orbis Geometris

In Vniuersitate Romana mense Februario anno MDCLXXX. solutum

A CANONICO PAVLO IOVIO NOVOCOMENSI

Seminarij Romani Conuictore

A D

ILLVSTRISS. ET EXCELLENTISS. PRINCIPEM

D. LIVIVM ODESCALCVM

Cære Ducem

Sanctissimi Domini Nostri

INNOCENTII XI.

Ex Fratre Nepotem.

ROMAE, Ex Typographia Nicolai Angeli Tinassij. MDCLXXXI.

Superiorum Permissu.

ILLVSTRISS. ET EXCELLENTISS.

PRINCIPI

D. LIVIO ODESCALCO

PAVLVS IOVIVS

Felicitatem.

NE Tibi Excellentiſsime Princeps Problematis huiuſce ſolutionem offerrem retrahebat me non leuiter eius tenuitas indigna; quæ tuo conſpectui ſeſe ſiſteret; verum cum animaduerterim Regi-

bus

bus quoque inter longinqui littoris piſces, & peregrina aucupia ſapere aſperam præcoquorum fructuum acerbitatem, multum Te etiam quamuis altiorum doctrinarum Arcanis imbutum, ſtudiorum meorum immaturitati primiſque cæptis daturum non dubitaui. Te præterea Patronum ſuum ſe ipſa adit veritas quæcunque Geometrica; quia non ignorat Geometria quot horas eius ſtudio impendas, quas Iuuentus tua tuæque fortunæ, ſi tuæ non eſſent, delicijs adſcriberent, atque voluptatibus. Eas nimirum diei particulas, quas curis grauioribus non debes ſumma ho-

minum

ARGVMENTVM.

SCriptionis materiam mihi ſubminiſtrat Problema de duplatione Trianguli æquilateri, omnibus Geometris propoſitum cum nonnullis conditionibus, quæ, alioquin obuium problema difficilius reddunt. Menſe Septembri anni 1679. in Vrbe Pragenſi cum non mediocri ſolemnitate propoſitum fuit hoc problema, atque ad eius ſolutionem inquirendam, prouocati omnes totius Orbis Geometræ, miſsis vndique propoſiti problematis exemplis, ex quibus vnum Romam peruenit menſe Februario anni 1680. primamque exortæ queſtionis notitiam mihi ſubminiſtrauit. Ego licet eo tempore nonniſi ab vno Anno Matheſim fuiſſem aggreſſus, videbar tamen mihi aliquid præſtitiſſe circa huius problematis ſolutionem; verum antequam veniam ad illa quæ mea ſunt, prius exhibeo problema cum omnibus ſuis circumſtantijs, & notis, prout continebatur maiori folio Pragæ impreſſo, atque Romam miſſo ad R. P. Aegidium Franciſcum de Gottignies in Collegio Romano meum Matheſeos Profeſſorem, à quo problema accepi. Deinde affero propoſiti problematis ſolutionem, quæ reſpondet Problemati ſub ea vniuerſalitate, de qua agitur in titulo, quæ non prætergreditur triangula æquilatera. Tertio, quoad ſubſtantiam idem problema ſolutum propono ſub maiori vniuerſalitate, cuius meminit Author in notis Problemati additis, ſic vt quæcunque triangula amplectatur, licet æquilatera non ſint. Denique ex conſideratione notarum, quas ſuo Problemati adiecit Author, occurrerunt mihi aliqua, quæ videbantur notatu digna, & fortaſsis problematis Authori non inutilia: quas proinde notas meas vltimo loco proponendo, totam ſcriptionem diuido in quatuor partes diuerſas.

PARS PRIMA.

Proponitur problema cum omnibus circumſtantijs, & notis contentis folio maiori Pragæ impreſſo, & Romam miſſo, atq; per reliquas Europæ partes diuulgato.

PROBLEMA.

Omnibus Geometris propoſitum.

DVPLATIO TRIANGVLI ISOGONI.

ESto (Fig. 1.) Triangulum Æquilaterum A B C (quod eô ipsò eſt Iſogonum, ſeu Æquiangulum per 5. 1. Elem.) Petitur Triangulo A B C duplum D E F, ſimiliter ἰσόπλευρον, ſeu æquilaterum conſtruere; idque tam conſtructione, quam demonſtratione independente à 5. & 6. ſeu independente ab omni proportione; per ſolum Librum 1. vel etiam, ſi neceſſe ſit, per reliquos 3. priores Elementorum Euclidis.

Nota I. Potuiſſem (quemadmodum inuentum habeo (hoc Problema proponere vniuerſalius; ſcil: Dato cuicunque rectilineo, ſimile, in data qualibet ratione multiplex, vel ſubmultiplex conſtruere; prout per 47. 1. Dato cuicunque Q. multiplex, vel ſubmultiplex in data ratione confici poteſt. Vel certè. Dato Q. conſtruere rectilineum æquale, & ſimile dato. Quæ eſt conuerſa prop. vltimæ l. 2. per quam dato cuicunque rectilineo, Q. æquale conſtrui poteſt, quod apex eſt l. 2. ſicut 47. eſt conſummatio 1. Sed malui, ſumma ſimplicitate, ad imitationem celeberrimi Problematis Delphici, quod Geometris ſimpliciter dicitur: DVPLATIO CVBI, Problema meum indigitare DVPLATIONEM TRIANGVLI.

N: II. Summam (vt videtur) Problematis huius facilitatem. Nam per l. 1. facillimè exhibetur Q. B. duplum Q. A. vt patet in Fig. 2. & 3. Cur non etiam in Fig. 4. Triang. æquilaterum, vnum duplum alterius? *Item*, per ſolum l. 1. facillimè exhiberi.

beri poteſt etiam Triangulum æquilaterum alterius multiplex, & quidem quocunque numero quadrato; quales ſunt: 4. 9. 16. 25. 36. &c. adeoque (vt patet ex Fig. 5. 6. 7.) fieri Triangulum D E F quadruplum ipſius A B C, & G H I. noncuplum. &c. imò (vt ex Fig. 8. & 9 liquet) etiam Triangulum A G C triplum dati A B C; Cur ergò non etiam exhiberi poſſit duplum? *Item*. Celeberrima illa Propoſitio Pythagoræ, ſeu 47. 1. eſt Vniuerſaliſſimè vera (vt demonſtratur per l. 6. El.) ità, vt non ſolùm vera ſit de QQ. quòd ſcil. Q. A C D E (Fig. 10.) ſit æquale QQ. A B G, B C H, ſed etiam de quibuſcunque figuris ſimilibus; adeò, vt etiam ſemicirculus A C D (Fig. 11.) ſit æqualis ſemicirculis A B E. B C F. & à fortiori (in Fig. 12.) Triangulum æquilaterum A C D æquale Triangulis æquilateris A B E B C F. Vnde habetur Triangulum æquilaterum vnum duplum alterius; ſcil. A C D. duplum ipſius A B E. vel ipſius B C F. Cumque veritas Fig. 10. demonſtretur per ſolum Librum 1. de QQ. cur non poſſit in Fig. 12. etiam de Triangulis.

Nota III. Finem huius propoſiti Problematis eſſe, I. Exercitationem longè, ni fallor, præſertim Tyronibus, vtiliſſimam. Huius enim ſolius Problematis inquiſitio, omnes priorum, præſertim 1. & 2. Elementorum Propoſitiones, tacitè velut compendio ſuſcitat, figitque memoriæ, quodam deinceps charactere, pæne dixerim, indelebili. II. Vt nè, cum eiuſdem ſolutionem Vniuerſalem, cum alijs quibuſdam, proximè publicauero; apparens fortè Inuentionis facilitas, (vt fieri aſſolet,) præſertim ab inexpertis, tanquam cuiuis obuia, vilis, aut cum Veritatis iniuria, minoris æquo habeatur. III. Vt eruditas ſummorum in hoc Geometrarum Concertationes imitemur; (nè fortè vnuſquiſpiam ſolorum hanc Tyronum Exercitationem arbitretur.) Ita enim in ſimili, ac penè in eodem, cum acutiſſimo *Peletario*, *Chriſtoph. Clauius*, cum *Clauio*, *Blancano*, *Guldino*, Magnus noſtri ſæculi Archimedes, GREGORIVS à S. VINCENTIO concertauit. Negauerat *Peletarius*, ſæpe laudatam Pythagoræ Propoſitionem, per ſolum Librum 1. aliter, quàm in Prop. 47. 1. fecerat Euclides, demonſtrari poſſe; ſed non deſtitit exercitatiſſimus *Clauius*, tentando omnia, dum feliciſſimo tandem ſucceſſu, binis id ipſum, ſed ab Euclide & Pythagora diuerſis Demonſtrationibus confecit. quibus, dum velut Columnis quibuſdam Herculeis, metam iam humano poſitam ingenio, *Clauius*, *Blancanus*, atque *Guldinus* arbitraren-

trarentur; GREGORIVS memor sibi nomen à VINCENTIO; vinci passus à nemine, cæteris omnibus plus vltrà euectus, tertiam, admirabili sanè facilitate, felicitateque, prioribus omnibus planiorem, nitidioremque adiecit; & in magno Opere Geometrico, immortali nominis sui laude, luci dedit. IV. & principaliter, vt tandem elucescat, quibus alis, & quousque Geometria absque proportionibus euolare possit, & vbi demum earum necessitas incipiat V. Denique finis vltimatus, huius Problematis est, tam Euclidis, quàm Geometriæ perfectio, ac supplementum. 1. Quoad insignem ampliationem Demonstrationum Expositoriarum, quæ sunt omnium euidentissimæ. Dabimus enim Nouam & Vniuersalem earundem Methodum. 2. Ad sarciendam l. 1. & 2. deficientiam; cùm enim finis, & præcipuus l. 1. scopus, sit propositio Pythagoræ, seu 47. 1. quæ docet in omni Triãgulo orthogonio, Q. hypotenusæ æquari QQ. laterum. Propositioni *deest vniuersalitas*; nam cùm hæc veritas, quam de solis QQ. demonstrat extendi possit, acproinde debeat, ad cuiuscunque speciei figuras à lateribus descriptas, idque absque ope 5. & 6. seu absque vlla laterum proportione, nec Euclides, nec tota retro præstiterit Antiquitas, præstat id Methodus nostra, & ità quidem, vt cùm ex 47 1. solum, *Datis quibuslibet QQ. vnum omnibus æquale construi possit*; à nobis Vniuersim: *Datis quibuslibet figuris, vna iunctim omnibus æqualis, & Datæ similis exhibeatur*. Apex porro l. 2. est eiusdem Propositio finalis, quæ docet: *Dato cuicunque rectilineo, Q. æquale construere*. Huic Propositioni *deest Conuersa* eiusdem; qua etiam *Dato cuicunque Q. construitur æquale rectilineum cuiuscunq; determinatæ speciei*. quod nostra itidem methodo Vniuersaliter efficimus. 3. Denique, quoad Vniuersalem, Nouam, & Genuinam, quam dabimus, Definitionem Figurarum similium. absque vlla, (quæ, vt ostendemus, superfluit) laterum proportione. Cuius genuinæ notionis defectu, coactus est Euclides, tam Librum 1. quàm 2. imperfectum relinquere; & ijs alioqui debitam perfectionem, longis Proportionum & Theorematum differre mæandris, eamque primùm libro 6. eiusque propositione antepenultima, atque adeò vltimo demum consequi Problemate.

Notand. IV. Nè suspicioni fraudis pateat locus, neue alius valeat nostris, vel nos alterius cornicari plumis. Iam hiscè, (sub velo tamen cryptographico, quod in ipsa Demonstrationis editione proxima reducere tenebimur) decla-

declaramus, triplicem illam methodum; qua propositum à nobis Problema Vniuersaliter resolutum habemus.

Ima. *Silertusani tulit dobnac pucilacan.*

IIda. *Situlnula gutma, cupucum turodus, pucutu Nobnac, pucuntul Naas.*

Et simplicissimè IIItia. *Si Tulpusa odurno cunlapu du gobe kopus, lupunoca.*

In omnibus verò nitor. *Estu fada naedu tutuni leilat nupuntu, fagolput, macabam tuxuma cabayom reciema nuputo.*

Si quis ergo alius Geometrarum, ante dilapsum anni sequentis dimidium, (quo exacto, Problematis huius solutio, cum *Proteo* nostro *Geometrico*, DEO dante, vulgabitur) veram & ipsa Problematis huius solutionem, siue similem, siue, quod inexpectatius accideret, dissimilem inuenerit; vel saltem eruditam circa illud aduersionem suam transmiserit; huius nos in eadem editione nostra, de nomine facta mentione, gloriam Orbi literario publicaturos sanctè recipimus. Cæterum, si quispiam vel imperitiæ; vel calumniæ prætextu, Problema hoc pridem iam ante nos, ab alio, siue propositum, siue solutum meminisse; vel, si voluisset, facilè reperturum fuisse; vel inquirere, per negotia, dedignatum esse, iactare ausus fuerit. nullam is profectò prudentibus, nisi realiter, ante editionem nostram, exhibita demonstratione (pro qua quidem exhibenda, dimidius, quem inueniendo largimur Problemati, credo sufficerit annus,) faciet fidem.

Problema hoc nuper in Academico Soc. IESV Collegio Pragæ exercitij causa propositum est

A R. PATRE SIGISMVNDO HARTMAN, Societ. IESV, SS. Theologiæ Doctore, & Sacrarum Paginarum Interprete; quondam VVratislauiæ, Olomucij, & Pragæ Matheseos Professore Publico & Ordinario. Nunc verò ex intelligentium voto, & Superiorum authoritate, publicam prodit in lucem. A. M. D. G.

PRAGÆ, Typis Vniuersitatis Carolo-Ferdinandeæ in Collegio Societ. IESV ad S. Clementem Anno 1679. Die 13. Septemb.

PARS SECVNDA.

Post aliquas breues notas circa propositum problema, affertur eius solutio, obseruatis conditionibus in titulo propositis.

Diffiteri non possum omnino inexpectatum mihi aduenisse problema de duplatione trianguli isogoni. Quandoquidem enim non tantum dato quouis triangulo æquilatero, verùm etiam dato quouis alio triangulo duplo maius exhibere, plane obuium fit in methodo magistro meo propria quam Logisticam appellat: non satis assequebar, quomodo hoc problema restrictum ad triangula æquilatera, mereretur proponi omnibus totius Orbis Geometris, atque æquiparari problemati Delphico, in quo de cubi duplatione agitur, quod hactenus elusit doctissimorum Geometrarum conatus omnes. Præterea, vbi perlegi pro solutione, ac demonstratione problematis requisitam circumstantiam, in qua petitur demonstratio independens ab omni proportione: plane attonitus hæsi: quandoquidem enim mihi indubitatum esset, quod in Logisticæ methodo, qua hactenus vsus fueram, legitimè demonstratum videbatur: nimirum, non minus propriam veramque proportionem esse illam, quam habet vna quantitas ad aliam sibi æqualem: quam quæ inuenitur inter duas eiusdem generis quantitates inter se inæquales; non intelligebam quomodo ab omni omninò proportione independens esset ille discursus demonstratiuus, in quo vna quantitas cum altera sibi æquali quantitate comparatur; sine qua comparatione prorsus indemonstrabile est propositum problema. Hic tamen scrupulus euanuit, quando reflexi problematis authorem esse ex illo genere Mathematicorum, qui non alijs, quam Euclideis Geometriæ elementis vtuntur, in quibus multis defectibus laborat proportionum doctrina, vt pluribus notatur in parte quarta Ideæ Logisticæ: & præterea, vt problematis Author bene monet in fine notæ tertiæ, Libri primi, & secundi Euclidis deficientia resarcienda est. Ex hac reflexione sublato illo scrupulo meo qui aliunde originem non habebat, quam quod

assueueram, non vacillanti, atque resarciendæ doctrinæ Euclideæ: sed alteri firmiori, atque solidiori, quæ traditur in Professoris mei Logistica: vt de triangulo isogonio propositi problematis solutionem tentarem, obseruatis omnibus conditionibus ab eius authore præscriptis, suasit, atque mihi persuasit meus Professor, exponendo multiplicem fructum quem ex hoc tentamine referrem: quippe quod mihi vtile esset: primò, vt intelligerem, an post superata Logisticæ methodo breuiora Geometriæ elementa, aliquid occurreret non planè obuium in longioribus Euclideis elementis. Secundò, vt melius perciperem differentiam inter Logisticę, atque Euclidis methodum. Tertiò, vt viderem an alia atque ordinata methodo edoctus, in vaga atque inordinata Euclidea methodo præstare possim, quod apud huius methodi sequaces tam arduum apparet, vt omnibus omninò totius Orbis Geometris tanta solemnitate, atque publica authoritate proponi mereatur. His alijsque similibus rationibus inductus, tentandam suscepi de isogonio triangulo propositi problematis solutionem; atque in hunc finem concedi mihi curaui Euclidea elementa, quæ ante illud tempus nunquam inspexeram. Prioribus Euclideorum Elementorum libris contentarum propositionum plerosque titulos legi, vt scirem quas veritates mihi liceret assumere.

Huic occupationi iuxtà Seminarij Romani leges præscriptas studijs horas per tres successiuè dies impenderam, quando aduerti illa mihi ad itentum finem sufficere, quæ legeram; quamobrem arrepto calamo me conuerti ad ordinandam scribendamque propositi problematis solutionem, & versus finem eiusdem hebdomadæ, in cuius initio problema mihi fuerat exhibitum, ad meum Professorem scriptam tuli eam solutionem, quæ sequitur.

PRO-

PROBLEMA.

Duplatio trianguli æquilateri.

Dato quouis triangulo æquilatero A B C, inuenire duplo maius triangulum æquilaterum D E F, independenter ab omni doctrina non contenta quatuor prioribus libris Elementorum Euclidis.

Fig. 13. & 14. SOlutio. Primò per 5. 4. per puncta A B C describatur circularis linea, deinde latera A B & B C per 10. 1. bifariam diuidantur in punctis G&H: atque ducta recta G H, occurrat descriptæ circulari lineę in puncto I. Tertio per puncta A&I ducatur recta linea, quæ rectæ B C productæ occurrat in puncto K. denique supra rectam D E, æqualem rectæ A K, per 1. 1. describatur triangulum æquilaterum D F E. Hoc erit triangulum quæsitum.

Fig. 14. & 15. Constructio pro demonstratione. Positis quæ in figura 13. pro solutione problematis facta sunt: primò supra rectam A K per 1. 1. fiat triangulum æquilaterum A L K. Deinde per 31. 1. ducantur rectæ AM, &BM, parallelæ rectis BC, & AC: item rectæ A N, & L N, parallelæ rectis L K, & A K. Tertiò ducantur rectæ C N, & C M. Quarto per puncta C & I ducatur recta occurrens rectæ A L in puncto O, & rectæ NL in puncto P. Denique per 31. 1. per punctum I ponatur recta parrallela rectæ AC, atque rectæ B K occurens in puncto R, ducanturque rectæ K M, I N & I L.

Demonstratio. Ex constructione patet quod C R I H sit parallelogrammum: ergo per 34. 1. recta R I æquatur rectæ C. H: sed per constructionem recta C H æquatur rectæ H A: ergo R I æquatur H A: sed per 29. 1. internus angulus H A I æquatur externo R I K, & prætereà idem internus angulus A C K æqualis est cuilibet externo angulo A H I & I R K, qui propterea inter se æquales sunt; ergo per 26. 1. A I æquatur IK. Rursus quoniam

niam per 12.3. angulus A I C ſimul cum angulo A B C æquatur duobus rectis, & inſuper per 13. 1. angulus A I C ſimul cum angulo A I P æquatur duobus rectis: patet angulum A B C æquari angulo A I P; ſed ex conſtructione etiam conſtat angulum A B C æquari angulo A K L: ergo angulus A I P æquatur angulo A K L: ergo per 28. 1. recta I P eſt parallela rectæ K L: ergo figuræ I P N A & I P L K ſunt parallelogramma: ſed vt iam oſtenſum eſt in his parallelogrammis inter eaſdem parallelas conſtitutis baſes A I & I K inter ſe ſunt æquales: ergo per 36. 1. parallelogrammum I P L K æquatur parallelogrammo I P N A. Quoniam verò ex conſtructione patet angulum K A N æquari angulo C A M, vtrinque addendo eumdem angulum C A K, etiam angulus C A N æquatur angulo K A M: atque inſuper per conſtructionem A N æquatur A K, & A C æquatur M A, igitur per 4. 1. triangulum K M A æquatur triangulo C N A: ſed per 37. 1. triangulum K M A æquatur triangulo C M A, quod per eamdem propoſitionem æquatur triangulo C B A: ergo triangulum C B A ęquatur triangulo C N A: atqui triangulum CNA per 37. 1. ęquatur triangulo I N A, quod etiam ęquatur triangulo I L A, ergo triangulum C B A æquatur triangulo I L A: ſed quoniam oſtenſum eſt rectam A I eſſe ęqualem rectæ I K per 38. 1. triangulum I L A æquatur triangulo ILK, adeoque triangulum A L K, hoc eſt per conſtructionem triangulum D E F duplum eſt trianguli I L A, ergo triangulum D E F duplum eſt trianguli C B A. Quod erat demonſtrandum.

PARS TERTIA.

Problema in ſecunda parte reſtrictum ad triangulum æquilaterum, proponitur, & ſoluitur ſub maiori vniuerſalitate ita vt nullum omnino triangulum excludat.

PLacuit quidem Profeſſori meo ſuperius propoſita, atque ad ipſum, vt dixi, à me delata problematis ſolutio, & demonſtratio: aiebatque ſe non habere quod carperet, niſi fortè quod ego ipſe prius aduerteram, nimirum eamdem proximè ſolutionem, atque demonſtrationem ſine magno labore à me vniuerſaliorem reddi poſſe; adeoque minimè decere, vt iuxtà Logiſticæ methodum vniuerſalioribus aſſuetus non tentarem maiorem vniuerſalitatem, ad vnicam triangulorum ſpeciem nimium reſtricti problematis. Hinc ſumpta occaſione paulatim perſuaſit, vt quod reliquum eſſet difficultatis ſuperando, ſeruatis omnibus conditionibus præſcriptis, inquirerem ſolutionem problematis, in qua petitur duplatio, non tantum æquilateri trianguli, ſed cuiuſcunque tandem propoſiti trianguli: hoc eſt, dato quocunque triangulo B D C: inuenire aliud X D Z prioris duplum, atque ipſi ęquiangulum. Facile aduerti difficultatem reſiduam, & mihi ſuperandam ad huius longè vniuerſalioris problematis enodationem in eo ſitam eſſe, vt inuenirem modum, obſeruatis conditionibus pręſcriptis demonſtrabilem, quo datum quodcunque triangulum iſoſcele duplari poſſit, & pręterea modum, quo dato quocunque triangulo iſoſceli conſtrui poſſit aliud triangulum dato iſoſceli ęquale, atque æquiangulum dato alteri triangulo. Vt has binas difficultates ſuperarem, quæ mihi ſuperandę videbantur, vt peruenirem ad intentam vniuerſalitatem, tria hic diuerſa problemata propoſui, ex quibus priora duo aditum aperiunt ad poſtremum, in quo proponitur, & obſeruatis conditionibus ſępius memoratis ſoluitur, & demonſtratur duplatio cuiuſcunque trianguli. In primo ex his problematis ſuperatur prior ex commemoratis duabus difficultatibus, atque proponitur duplatio cuiuſcunque trianguli

iſoſce-

ſoſcelis, altera difficultas ſoluitur in ſecundo problemate, quod docet quomodo dato triangulo iſoſceli, aliud conſtrui poſſit, & ęquale dato iſoſceli, & tamen ęquiangulum dato cuicunque alteri triangulo non iſoſceli. Tertium problema continet propoſitę difficultatis enodationem, hoc eſt dati cuiuſcunque trianguli duplationem; in eius demonſtratione aſſumo aliquam non Euclidis, ſed Clauij propoſitionem vt breuior ſim: cæterum cum pro illius demonſtratione nihil aſſumat Clauius contrarium pręſcriptis conditionibus, manifeſtũ eſt quod hãc propoſitionem aſſumendo, quã poteram tanquam meam proponere, non recedam à præſcriptis mihi terminis. Verùm ſimiliter in reliquis aut ſolutionum, aut demonſtrationum partibus ſingulis rigorosè obſeruem conditiones pręſcriptas ab Authore problematis in prima parte ſuperius hic à me propoſita, ſtatuere poterit quiſquis Euclideę doctrinæ non ignarus leget problemata, quę enarrato ordine hic ſubſequuntur.

PROBLEMA I.

Dato quouis triangulo iſoſceli A B C, inuenire duplo maius triangulum iſoſcele D E F, quod dato triangulo A B C æquiangulum ſit; independenter ab omni doctrina non contenta quatuor prioribus libris Elementorum Euclidis. Fig. 18.

SOlutio per 5.4. deſcribatur circularis linea tranſiens per puncta A B C deinde per 10.1. trianguli iſoſcelis baſis A B diuidatur bifariam in puncto H. tertiò per 23. 1. ducatur recta I H occurrens deſcriptæ circulari lineę in puncto I, ita vt angulus B H I ęquetur angulo A C B. Quartò ducantur rectæ lineæ I B & I A, atque in recta I A producta ſi opus fuerit, notetur punctum D. ita vt I D æquetur C A. Quintò per 31. 1. ducatur per punctum D recta D E parallela rectę B A, atque rectæ I B productæ occurrens in puncto E, denique per 23. 1. ducantur rectæ D F & E F, ita vt angulus D F E æqualis ſit angulo C B A, & angulus DEF æquetur angulo B C A. Erit triangulum D E F illud quod petebatur.

Constructio pro demonstratione. Primò producatur recta B I vsque in K, ita vt I K æquetur I D. Secundò per 31. 1. ducatur recta K L parallela & æqualis rectæ I D, similiter recta F M parallela, & æqualis rectæ E D, ponanturque rectæ D L, & D M, denique I H producatur, vt rectæ D E in puncto P, & rectæ M F in puncto O occurrat, atque ducantur rectæ lineæ E L, I M, P M, P F.

Demonstratio. Per solutionem angulus ACB æquatur angulo D E F, sed per solutionem angulus A C B, æquatur angulo B H I, qui per 29. 1. æqualis est angulo EPI quandoquidem lineæ A B, & D C per solutionem sint inter se parallelæ: ergo angulus D E F æquatur angulo EPI, qui per 15. 1. æqualis est angulo D P O: ergo per 28. 1. lineæ E F & P O sunt inter se parallelæ. Rursus ex solutione, & constructione satis patet angulum M D E æquari angulo L D I, adeòque vtrinque addendo eumdem angulum E D I, etiam angulum M D I æquari angulo L D E: sed per constructionem D M æquatur rectæ D E, & insuper L D æquatur rectæ D I, ergo per 4. 1. triangulum M D I æquatur triangulo L D E: sed quoniam prius ostensum est parallelas inter se esse lineas E F & P O, adeoque per constructionem, & prop. 30. 1. etiam rectæ P O, & D M, sint inter se parallelæ, per 37. 1. triangulum M D I æquale est triangulo M D P, quod etiam per 37. 1. æquale est triangulo D P F; igitur triangulum L D E æquatur triangulo D P F; sed triangulum L D E per 37. 1. æquale est triangulo L D K, quod etiam; vt ex constructione satis patet, æquale est triangulo D I K: ergo triangulum D P F æquatur triangulo DIK: sed quoniam per solutionem DE, & AB sunt inter se parallelæ, atque insuper recta I O diuidat rectam A B in puncto H, vt A H æquetur H B, etiam per schol. Clauij ad prop. 40. lib. 1. Euclidis D P æquetur P E, adeoque per 38. 1. triangulum D P F æquetur triangulo P E F, satis patet triangulum D E F esse duplum trianguli D P F: ergo etiam triangulum D E F: est duplum trianguli D I K: sed quoniam per 22. 3. angulus B I A simul cum angulo A C B æquatur duobus rectis, & etiam per 13. 1. angulus B I A simul cum angulo D I K æquatur duobus rectis, constat angulum A C B æquari angulo D I K: & insuper ex constructione; recta I D æquatur C A, & etiam recta I K æquatur rectæ C B: quare per 4. 1. triangulum A C B æquatur triangulo D E K: ergo triangulum D E F est duplum

trienguli A C B: atqui ex ipſa ſolutione ſatis conſtat triangulum D E F eſſe æquiangulum triangulo A C B: ergo triangulum D E F eſt duplum trianguli A C B, & inſuper ipſi æquiangulum. Quod [illegible]

PROBLEMA II.

Datis tribus triangulis EDF, GDH, BDC, quorum duo EDF, & BDC habeant tam baſes, quam altitudines inter ſe ęquales, prętereа duo triangula EDF & GDH ſint iſoſcelia, atq; æquiangula; inuenire quartum triangulum I D K, quod ſit æquale triangulo GDH, & æquiangulum triangulo B D C, independenter ab omni doctrina non contenta quatuor prioribus libris elementorum Euclidis. Fig. 16.

SOlutio. Primò ſi data triangula ita conſtituta non ſint, conſtituantur vt verticem D communem habeant, atque puncta D, F, H ſint in directum, & prætereа in directum ſint puncta FCB, deinde latera D B, & H G, producantur ſi opus fuerit, vt ſimul concurrant in puncto I: ſimiliter D C producatur vt rectæ G H occurrat in puncto K: erit triangulum I D K illud quod petitur.

Conſtructio pro demonſtratione. Per 23.1. fiat angulus D G O æqualis angulo D H K ſic vt G O ſit æqualis H K, ducanturque rectæ O I, O E, O D, I E, K F.

Demonſtratio. Per hypotheſim BC æquatur EF, & prætereа B E æquatur C F, ſed quoniam per hyp: angulus D F E æquatur angulo D H G per 28. 1. B F, & I H ſunt parallelæ: ergo per 38. 1. triangulum D E B æquatur triangulo D C F, & etiam triangulum B E I æquatur trangulo F C K: ergo per axioma 2. triangulum D I E æquatur triangulo D K F. Rurſus quia per hypotheſim triangulum G D H eſt iſoſcele, D H æquatur D G, & prætereа per conſtructionem H K æquatur G O, ac denique angulus D G O æquatur angulo D H K, ergo per 4. 1. triangulum D H K æquatur triangulo D G O; ſed quoniam per hypo-teſim

tesim satis patet F H æquari E G, & insuper per constructionem H K æquetur G O, atque angulus F H K æquetur angulo E G O [illegible]angulum F H K æquatur triangulo E G O, igitur per 3. axioma triangulum D F K æquatur triangulo D E O. Quoniam igitur [illegible] constet triangulum DFK æquari triangulo D E O: patet triangula D I E & DEO esse inter se æqualia: igitur per 40. 1. rectæ D E & O I sunt parallelæ: ergo per 37. 1. triangulum E G O æquatur triangulo E G I: sed prius ostensum est triangulum E G O æquari triangulo F H K; ergo etiam triangula E G I, & F H K sunt inter se æqualia; sed quoniam ex hypothesi anguli D F E, & D H G sunt inter se æquales, per 28. 1. rectæ H G, & F E sunt inter se parallelæ; ergo per 40. 1. rectæ I G, & H K sunt inter se æquales: ergo addita vel sublata vtrinque recta G K, etiam IK, & G H sunt inter se æquales: ergo per 38. 1. triangulum I D K æquatur triangulo G D H; denique quia I H, & B E sunt parallelæ per 29. 1. angulus K I D æquatur angulo C B D, & præterea angulus I K D æquatur angulo B C D; angulusque I D K est communis: ergo triangulum I D K est æquale triangulo isosceli G D H, & insuper æquiangulum triangulo B D C. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA III.

Duplatio dati cuiuscunque trianguli.

Dato quouis triangulo B D C, inuenire aliud triangulum DEF, duplo maius triangulo B D C, atque illi æquiangulum; independenter ab omni doctrina non contenta quatuor prioribus libris elementorum Euclidis. Fig. 17.

SOlutio, primò per 10. 1. recta B C bifariam diuidatur in puncto E; deinde per 11. 1. ducatur recta D F perpendicularis

ad

ad rectam B C, illi occurrens in F. Tertiò per 3. 1. in recta B C, producta si opus fuerit, notentur puncta G, & H, ita vt GF, & FH singulæ sint æquales eidem rectæ E C. Quartò per problema primum hic propositum inueniatur triangulum isosceles X D Z duplo maius triangulo isosceli G D H, atque illi æquiangulum. Quintò per problema præcedens inueniatur triangulum P D R æquale triangulo isosceli X D Z, atque æquiangulum triangulo B D C. Erit triangulum P D R illud quod petitur.

Demonstratio. Ex solutione patet triangula B D C, & G D H inter easdem parallelas constituta esse, & insuper habere bases B C, & G H inter se æquales: ergo per 38. 1. triangulum B C D æquatur triangulo G D H; sed ex solutione etiam constat triangulum X D Z esse duplum trianguli G D H; ergo triangulum X D Z est duplum trianguli BDC; atqui ex ipsa solutione etiam patet triangulum P D R æquari triangulo X D Z, & præterea esse æquiangulum triangulo B D C: ergo triangulum P D R, est duplum trianguli B D C, & insuper ipsi æquiangulum. Quod erat demonstrandum.

PARS QVARTA.

Quatuor notæ, in totidem notas Problemati de duplatione trianguli æquilateri additas ab eius Authore.

NOtandum primò. Mihi persuasum certissimumque est quod in nota tertia non semel asseritur: nimirum Euclidea elementa in multis deficere; atque nisi fallor hæc est communis Geometrarum ferè omnium sententia: hac de causa varij doctissimique Goemetræ, iam per plura sæcula alloborarunt, atque in hodiernam vsque diem laborant, vt corrigant, & suppleant Euclideorum elementorum defectus; hinc propemodum singulis annis in lucem prodeunt Euclidea elementa nouis commentis, atque annotationibus *illustrata*, *aucta*, *declarata*: vel Euclidea elementa, *emandata*, *expurgata*, *restituta*, alijsque huiusmodi speciosis titulis ornata. Licet Vrbs Romana non abundet magna Geome-

trarum

tratum copia, tamen nuperrime in illa, intra biennium bis sub prælo sudauit, atque à defectibus expurgatus, & restitutus in lucem prodijt nouus Euclides, si librorum titulis credendum est. Quoniam igitur, vt in nota tertia, numero primo, & secũdo dicitur, quòd problematis de duplatione tranguli æquilateri vltimatus finis sit, Geometriæ perfectio, & supplementum: quodque hoc problema à suo Authore proponatur *ad resarciendam Euclideæ doctrinæ deficientiam*: vt ad tam nobile intentum pro viribus concurram, ex ijs quæ in Professoris mei opusculis de Logisticæ eius methodo conscriptis legi de Euclidea doctrina, nonnulla placuit colligere: quę fortassis non sine fructu attentius expendet problematis Author. Ante omnia existimarem illi maximè vtile inspicere sextam Epistolam contentam lib. 1. Epistolarum Professoris mei, qua Epistola, ordine quo apud Euclidem inueniuntur, continentur eius primi, & secundi libri propositiones omnes, sed demonstratæ, iuxta Logisticæ methodum. In hoc opusculo, cęteris si placet prætermissis, legere posset atque attentius considerare proposit. 47. lib. 1. Euclidis, & insuper propos. 49. illic additam Euclideis propositionibus. In consideratione propositionis 47. aduertet quomodo Logisticę methodo demonstretur celebris illa veritas, quæ iuxtà ipsum est vltimus scopus, anterioribus Euclideis propositionibus intentus. In propositione 49. aduertet eamdem propositionem 47. libri primi Euclidis proponi reductam ad vniuersalitatem longè maiorem, quam ipse promittat; atque eius veritatem, originem habere ex duplici trium proportionalium terminorum seriè, quarum primus terminus communis sit: Vnde quantum ego saltem assequor, non ex suis proprijs fundamentis deducet intentam veritatem eo ipso quod hanc inferet independenter à lineis proportionalibus.

Notandum secundò. Quandoquidem Author intendat (vt affirmat in nota 3) Euclideorum elementorum deficiẽtiam resarciendo, perficere Geometriæ fundamenta; fortassis non inutile illi foret reflectere ad singula, quæ in libellis de Logisticæ methodo hactenus publicatis notantur, vt aliquomodo defectuosa in Euclidea methodo; sed ne hæc sparsim proposita, maiori quam par sit labore teneatur colligere, vtile existimaui nonnulla à me collacta breuiter proponere, & vbi inueniantur indicare: Si defectus non sine meminerit Euclidis sui causam suscipere, eiusque doctrinam ab imposturis vindicare. Primò in Ideæ Logisticæ par. 2. cap. 12.

repræ-

reprehenduntur aliqua Euclidis axiomata: atque in primis axioma. 9. asserens totum sua parte maius esse, in quo axiomate requiritur maior claritas, siue significationis eius declaratio, ne intelligi possit in sensu, in quo falsum est praeterea axioma 8. asserens inter se aequalia esse, quae sibi mutuò congruunt, damnatur vt falsum vel certè inutile pro Geometria speculatiua: tametsi ibidem asseratur vix vllam Euclideae Geometriae propositionem inueniri, quae aut immediatè, aut mediatè non innitatur huic principio siue axiomati. Tertiò lib. 1. Epist. mathematicarum Epist 6. in scholio post proposit. 1. pag. 77. accusatur Euclides, & eius Interpretes, quod praeter pauca, atque magis clara axiomata, quae expressè annotata praemittunt in suis elementis, postea satis liberè alias veritates minus manifestas assumant in suis demonstrationibus. De Euclideis definitionibus aliqua generalioribus verbis proposita inuenio in dubio 9. Clauis Logisticae, vbi ex Euclidearum definitionum deficientia satis prolixo discursa infertur nihil rigorosè demonstratum inueniri apud Euclidem, aut eius Interpretes; caeterumlicet paucas Euclideas definitiones ad suam Logisticam transtulerit, tamen vix aliam expressè damnatam aduerti, quam proportionis, & aequalium proportionum definitionem Euclideam: sed de proportionibus aliqua paulò post insinuanda sunt. Praetereà hic intelligo, magis modernos Euclidis restitutores, quorum opera in hac Vrbe impressa sunt acrius inuehi in Euclideam parallelarum linearum definitionem.

Notandum 3. In ordine ad illud, quod in nota tertia num. 4. dicitur Problematis propositi partialem quidem, sed non planè vltimum, atque praecipuum finem esse, vt tandem elucescat quibus alis, & quousque Geometria sine proportionibus euolare possit, & vbi demum earum necessitas occurrat: non infructuosum videtur celeberrimi Renati descartes pronuntiatum annotatum in Claui Logisticae versus finem dubij 17. Hic Author affirmat se circa Mathematicas scientias hoc aduertisse, nimirum etiamsi illae circà diuersa obiecta versentur, in hoc tamen conuenire omnes, quod nihil aliud examinent, quàm relationes, siue proportiones quasdam, quae in ijs inueniuntur; longè enim diuersa sunt Geometriam sine proportionibus etiam altius euolare, & Geometriam nihil examinare, nisi proportiones: in citato dubio, paulò post hoc Renati Descartes pronunciatum, affirmat Logisticae Author suspicari se, nullum ex Euclideae doctrinae Interpretibus vnqnam allecutum

cutum esse, quid per vocem, Proportio, intelligendum sit apud Geometras: quid iuxtà ipsum significet vox, proportio, nusquam clarius exponit, quam ad gradum 11. Clauis Logisticę, vbi citantur præcipua omnia capita, quæ legenda sunt ad sufficientem intelligentiam nouæ doctrinæ eius de proportionibus; præterquæ capita maximè vtile videtur dubium 8. eiusdem Clauis Logisticæ ad pleniorem intelligentiam eius definitionis proportionum æqualium: quarum ęqualium proportionum definitio, vt apud Euclidem inuenitur, passim à Geometris damnata asseritur cap. 1. partis 4. Ideę Logisticę, in qua parte arbitratur se proponere omnibus numeris absolutam, atque rigorosis demonstrationibus stabilitam de proportionibus doctrinam: quæ si subsistit necessè est concedere non minus veram propriamque proportionem esse, quæ inuenitur inter duas eiusdem generis quantitates inter se ęquales, quam inter reliquas non æquales; nisi igitur problematis Author prius destruat hanc doctrinam, non video quomodo bene assequi possit intentum à se finem, nisi in problematis sui demonstratione omninò abstineat ab æqualium quantitatum inter se comparatione, quod non fit in allata superius à me demonstratione, neque requiri videtur ab ipso Authore: quandoquidem æqualia passim inter se comparentur ab ipso Euclide in Elementorum suorum libris prioribus quotum visum permittit. Præterea quandoquidem iuxta problematis Authorem quælibet propositio requirat, & exigat vniuersalitatem, quam admittit: an forte defectuosæ negari poterunt eius propositiones restrictæ ad ęqualitatis proportionem, quæ de qualibet proportione demonstrari possunt, nisi prius constet inter æqualia nullam proportionem inueniri? His adde, quod in 5. parte Ideæ Logisticæ, cap. 1. proponatur maximè considerabilis vniuersalitatis propositio, cuius sensus clarius exponitur ibidem cap. 2. in nota 4. atque ad gradum 13. Clauis Logisticę distinctius declaratur eius vsus; quibus locis contendit Author Logisticæ, eam dictæ eius propositionis amplitudinem esse, vt sua vniuersalitate amplectatur propositiones Euclideas, & Archimedeas omnes, in quibus aliquid asseritur de æqualitate, aut alia quauis proportione, quæ inuenitur inter duas superficies, aut duo corpora, de quibus agit, stricta, quam appellant, Geometria; adeo ut iuxta Logisticę methodum, nonnisi Tyronum exercitium sit, singulas istas, siue Euclideas, siue Archimedeas propositiones proprio marte demonstrare; dummodo vltra prędictę vniuersalioris pro-

propositionis intelligentiam, sufficientem notitiam habeant elementarium propositionum, siue de angulis, siue de proportionibus, contentarum in parte 3. vel 4. Ideæ Logisticæ. Quoniam verò in prædicta tertia, parte Logisticę contentæ propositiones ferè omnes, licet aliter quam apud Euclidem demonstratæ proponantur, tamen ex primo, tertioue eius libro desumptæ sunt, vel certè ex istis libris satis commodè, inferri possunt: non videntur tam parum vtiles propositiones de angulis atque parallelis lineis agentes, quæ ab Euclide in primo lib. 1. proponuntur, vt tota huius libri vtilitas æstimanda sit consistere in propositione 47. hanc Logisticę Author pro praxi maximè vtilem non negat, eam tamen inter speculatiua sua fundamenta putauit negligendam. Prętereà non video, quomodo de angulis, angulorumque ęqualitate agentes propositiones Euclidec magni momenti non sint, quando quidem sine his propositionibus inutilis propemodum erit; illa, quam Author problematis promittit, tanti que facit, similium figurarum definitio à solis angulis dependens.

Notandum 4. Secunda nota addita problemati de trianguli æquilateri duplatione, consideratione digna videtur ijs, qui Logisticæ methodo vtuntur: vt in exemplo cognoscant quam verè in Clauis Logisticæ dubio 17. de Euclidea methodo pronuntietur quod vaga sit, & destituta adminiculis, quæ in Logisticæ methodo iuuant, ac dirigunt, ad intenti problematis solutionem, adeo ut methodo illa Euclidea vtentes, quodammodo cęco modo varia tentando procedant, donec casu incidant in aliquid vtile ad propositum finem. Quantum prętereà methodus Logisticę Euclideam superet, pluribus enarratur tùm in prędicto dubio 17. tùm in dubio 16. Clauis Logisticę; quare post dictorum dubiorum lectionem, non erit inutile expendere quod à problematis Authore dicitur num. 3. notę 3. & in fine notę 4. pręsertim cum problematis Author post tam laudabilem atque solemnem aliorum Mathematicorum prouocationem, ad erudita, atque literaria certamina: ad primum Romani Collegij matheseos rescriptum nihil hactenus respondendo, quodammodo obmutuisse, atque certamen detrectasse videatur, & tamen contenta erat, non Logistica, cui tantum assueuit, sed electis ab Authore armis tantumodo vti, pręscriptasque eius conditiones obseruare, immo neque certaminis materiam variauerat, sed cum Pragensis Mathesis proposuisset problema de duplatione trianguli ęquilateri, adiectis certis conditionibus soluendum:

uendum:

dendum: Mathesis Romana rescripsit, à se iam solutum problema propositum: vt tamen non planè inutiliter mittat, & bene inchoatum, litterarium, sibique gratissimum certamen vtiliter producat, conseruare se inuentam solutionem, atque eius demonstrationem (quę illa erat quæ in secunda parte proposita est) proponere tamen se Mathesi Pragensi demonstrandam ab hac paulò diuersam eiusdem problematis solutionem obseruatis pręscriptis à Mathesi Pragensi conditionibus; per quem hanc demonstrationem acciperet, eidem se consignaturam quod petebat Pragensis Mathesis. Verum nihil amplius rescriptum à Mathesi Pragensi, atque ad Maximorum Mathematicorum imitationem laudabiliter inchoatum litterarium certamen interruptum, non finitum est, propterea que resumendum, quando placuerit Mathesi Pragensi: à qua, sed inutiliter, per integrum annum expectatum responsum, non nisi hoc anno 1681. permisit in lucem prodire, versus initium elapsi anni absolutam problematis de quo actenus egimus solutionem.

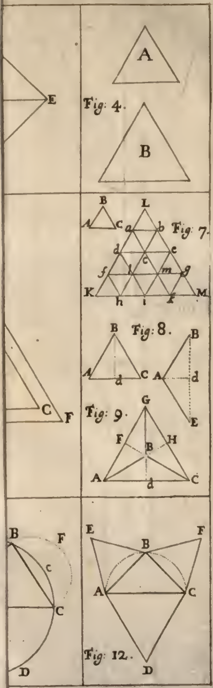
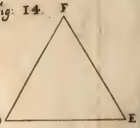
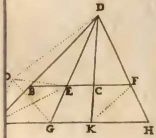

E
A
Fig: 4.
B
B
L
A
C
a
b
Fig: 7.
d
e
c
f
l
m
g
K
M
h
i
k
B
Fig: 8.
B
A
d
C
A
d
E
G
C
F
Fig: 9.
F
H
B
A
d
C
B
F
c
C
D
E
F
B
A
C
Fig: 12.
D

Fig: 14.



16.



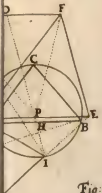


Fig: 18.